ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE, AND MANAGEMENT



УДК 512.64+517.5 DOI 10.12737/16052

Об алгоритме построения тёплицевых матриц с заданным числом компонент связности дополнения предельного спектра*

С. А. Золотых**
[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

On Toeplitz matrices construction algorithm with a given number of connected components of the limitary spectrum complement***

S. A. Zolotykh**
[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Исследуются простейшие топологические свойства предельного спектра, а именно связность его дополнения в комплексной плоскости. В работе проведена численная проверка оценок снизу для максимального числа компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц, символ которых — полином Лорана заданной степени. Приведён алгоритм вычисления параметров символа тёплицевой матрицы, предельный спектр которой разбивает комплексную плоскость на заданное число компонент связности. Численно исследованы примеры полиномов, являющихся символами тёплицевых матриц, предельный спектр которых делит комплексную плоскость на заданное множество компонент связности. Приведены графики предельных спектров тёплицевых матриц, иллюстрирующие полученные в работе результаты. Проведено сравнение полученных методами работы предельных спектров и спектров тёплицевых матриц больших размеров с заданным символом.

Ключевые слова: ленточная тёплицева матрица, символ тёплицевой матрицы, предельный спектр, число компонент связности.

The simplest topological properties of the approximate spectrum, namely the connectivity of its complement in the complex plane, are studied. A numerical verification of the lower bounds for the maximum number of the connected components of the limitary spectrum complement of the band Toeplitz matrices whose symbol is Laurent polynomial of the specified degree, is carried out. The algorithm for computation of the Toeplitz matrix symbol parameters with its approximate spectrum dividing the complex plane into a given number of connected components is adduced. The examples of polynomials which are Toeplitz matrices symbols with the limitary spectrum dividing the complex plane into a given set of connected components are numerically investigated. Graphs of the limitary spectra of Toeplitz matrices illustrating the results obtained are given. The obtained limitary spectra are compared to the Toeplitz matrices spectra of large size with a given symbol.

Keywords: banded Toeplitz matrix, Toeplitz matrix symbol, limitary spectrum, number of connected components.

Введение. В данной работе решается задача экспериментальной проверки оценок снизу максимального числа компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц, символы которых — лорановские полиномы заданной степени. Вычисляются значения параметров символа последовательности ленточных тёплицевых матриц, дополнение предельного спектра которых имеет заданное число компонент связности из промежутка значений, границы которого найдены в работе [1]. Заметим, что это — часть общей задачи исследования геометрии предельного спектра ленточных тёплицевых матриц [2–6]. Отметим, что в случае тёплицевых матриц с более сложным символом предельный спектр часто допускает явное и относительно простое описание по сравнению с предельным спектром ленточных тёплицевых матриц [7–8]. Уточним постановку задачи и напомним необходимые для понимания

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
** E-mail: Svetlana.zolotyx@mail.ru
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

работы понятия [5, 9]. Пусть f — комплекснозначная функция, аналитическая в окрестности окружности единичного радиуса $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$:

$$f(z) = \sum_{k \in Z} a_k z^k . \tag{1}$$

Будем обозначать через $T_n(f)$ тёплицеву матрицу размера $n \times n$, то есть матрицу $T_n(f) = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, матричные элементы которой задаются формулой $a_{i,j} = a_{i-j}$, где a_k находятся из (1). Отметим, что у тёплицевой матрицы на каждой из диагоналей, параллельных главной, стоят одинаковые элементы. Заметим, что если для $k < -r$ и для $k > h$, $a_k = 0$, то есть аналитическая функция $f(z)$ превращается в лорановский полином $f(z) = \sum_{k=-r}^{h} a_k z^k$, то соответствующая такой функции тёплицева матрица называется ленточной.

Упорядочим каким-нибудь образом собственные значения $\{\lambda_{n,i}\}_{i=-n+1}^{n-1}$ матрицы $T_n(f)$ так, что $|\lambda_{n,i}| \le |\lambda_{n,j}|$ при $i < j$. Множество предельных точек последовательностей $\{\lambda_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть предельным спектром последовательности тёплицевых матриц $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначать через $\sigma_l(f)$.

Далее выясним, как связан предельный спектр с функцией $f(z)$ (которую также называют символом каждой из матриц последовательности $\{T_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$) и какова геометрическая структура предельного спектра. Для самосопряжённых матриц ответ известен давно. Предельный спектр — это отрезок вещественной прямой. Несамосопряжённый случай намного сложнее. В работе Ф. Спитцера и П. Шмидта [2] было получено описание предельного спектра несамосопряжённых тёплицевых матриц в терминах совпадения модулей корней многочлена строящегося по символу последовательности ленточных теплицевых матриц. Используя такое описание, Ф. Спитцер и П. Шмидт доказали, что предельный спектр является либо одномерным множеством, являющимся объединением аналитических дуг, либо нуль-мерным множеством, состоящим из точки. Позднее Ульман доказал связность предельного спектра [3]. Более тонкие геометрические вопросы о строении предельного спектра ленточных несамосопряжённых матриц являются открытыми вопросами до настоящего времени. В данной работе исследуется вопрос о числе компонент дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. Экспериментально доказывается, что число этих компонент может быть сколь угодно большим. Построены конкретные примеры символов — полиномов Лорана, таких, что предельный спектр соответствующих им тёплицевых матриц разбивает комплексную плоскость на максимальное число компонент связности, равное $\left[\frac{k+1}{2}\right]$, где $2k$ — степень полинома Лорана, являющегося символом данной последовательности тёплицевых матриц. В основе работы лежит способ специального выбора параметров полиномов Лорана, являющихся символами тёплицевых матриц, предельный спектр которых разбивает комплексную плоскость на заданное число компонент связности r, где $1 \le r \le \left[\frac{k+1}{2}\right]$. Таким образом, на основе численного эксперимента получаем некоторые оценки снизу для максимального числа компонент, на которые может разбивать комплексную плоскость предельный спектр последовательности тёплицевых матриц с символом заданной степени k. Заметим, что в данной работе уточняется часть результатов, анонсированных в работе [10]. Следует также отметить, что вопросы геометрии предельного спектра играют большую роль при изучении асимптотики собственных чисел тёплицевых матриц больших размеров [4]. В работе использованы следующие стандартные обозначения: $\sigma(A)$— спектр оператора A: $\sigma(A) = \{\lambda \in C : A - \lambda I - \textit{необратим}\}$.

Основной результат работы. Рассмотрим многочлен

$$b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k , \tag{2}$$

где μ, α, β являются комплексными числами, и $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Пусть $a(t) = t^{-1}(t-\alpha)(t-\beta)$. Легко видеть, что $b(t) = \mu + (a(t))^k$.

Далее численно проверим следующий результат, анонсированный в [4].

Теорема 1. Если $k = 1$ или $k = 2$, тогда $C \setminus \sigma_l(b)$ связен.

2. Если $k \ge 3$ тогда $C \setminus \sigma_l(b)$ имеет по меньшей мере $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ компонент (включая неограниченную компоненту).

3. Для каждого натурального числа j между 1 и $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ существуют такие α, β, что $C \setminus \sigma_l(b)$ имеет ровно j компонент. Именно α, β находятся из уравнений

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\cdot\beta} = f_1, \\ -(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\cdot\beta} = f_2. \end{cases} \quad (3)$$

При этом f_1, f_2 следует выбирать так, чтобы разность значений их аргументов удовлетворяла следующему условию:

$$\frac{\pi(r-1)}{k} < |arg(f_1) - arg(f_2)| < \frac{\pi r}{k}, \; r = 1, \ldots, k \; . \quad (4)$$

В этом случае число компонент связности дополнения предельного спектра будет равно $\left[\frac{r+1}{2}\right]$.

Замечание. Приведём явный способ построения символа тёплицевых матриц, предельный спектр которых делит комплексную плоскость на число $s = 1, \ldots k$ компонент связности, уточняющий приведённую выше теорему. Зафиксируем произвольное комплексное число z_0, отличное от 0. Выберем угол φ, удовлетворяющий следующему условию:

$$\frac{\pi(s-1)}{k} < \varphi < \frac{\pi s}{k} \; . \quad (5)$$

Положим $f_1 = z_0$, $f_2 = e^{i\varphi} z_0$. Мы можем, используя формулы (3) явно найти значения параметров α, β, чтобы выполнялось условие (4):

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{z_0 + e^{i\varphi} z_0}{4} + \frac{1}{2} z_0 e^{i\varphi/2}, \\ \beta = -\frac{z_0 + e^{i\varphi} z_0}{4} - \frac{1}{2} z_0 e^{i\varphi/2}. \end{cases}$$

Примеры вычисления предельных спектров. Ниже, используя описанную выше схему вычисления параметров символа тёплицевой матрицы, предельный спектр которой разбивает комплексную плоскость на заданное число r компонент связности, находим значения параметров символа. Результаты вычислений сведены в таблицу.

Отметим, что значение μ выбирается так, чтобы $|\mu - (\alpha+\beta)| > 0$ и было достаточно мало, а $|\alpha\cdot\beta| > 0$ достаточно велико. Будем рассматривать символ $b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k (t-\beta)^k$ с параметрами из следующей таблицы:

Таблица 1

Связь числа компонент связности и параметров символа

Число компонент r	Угол φ $\frac{\pi(s-1)}{k} < \varphi < \frac{\pi s}{k}$	f_1	f_2	α	β	μ	k
1	$0 < \varphi < \pi$, пусть $\varphi = 1{,}11$	8–7i	9,8272+ 4,0529i	0,7871– 0,1301i	–9,7007+ 1,6036i	–8,9+1,5i	1
2	$\frac{2\pi}{3} < \varphi < \pi$, пусть $\varphi = 2{,}48$	8–7i	–2,0115+ 10,4381i	3,1123+ 1,7868i	–6,1065– 3,5058i	2,7+1,7i	3
3	$\frac{4\pi}{5} < \varphi < \pi$, пусть $\varphi = 2{,}52$	8–7i	–2,4273+ 10,3493i	3,1624+ 1,9007i	–5,9487– 3,5753i	–2,5–1,5i	5
4	$\frac{6\pi}{7} < \varphi < \pi$, пусть $\varphi = 2{,}71$	8–7i	–4,3382+ 9,7046i	3,3599+ 2,4816i	–5,1908– 3,8340i	–1,8–1,3i	7

Приведём примеры предельных спектров последовательностей тёплицевых матриц с символами вида (2), параметры которого заданы в таблице 1. Номера рисунков соответствуют номерам параметров символа из таблицы.

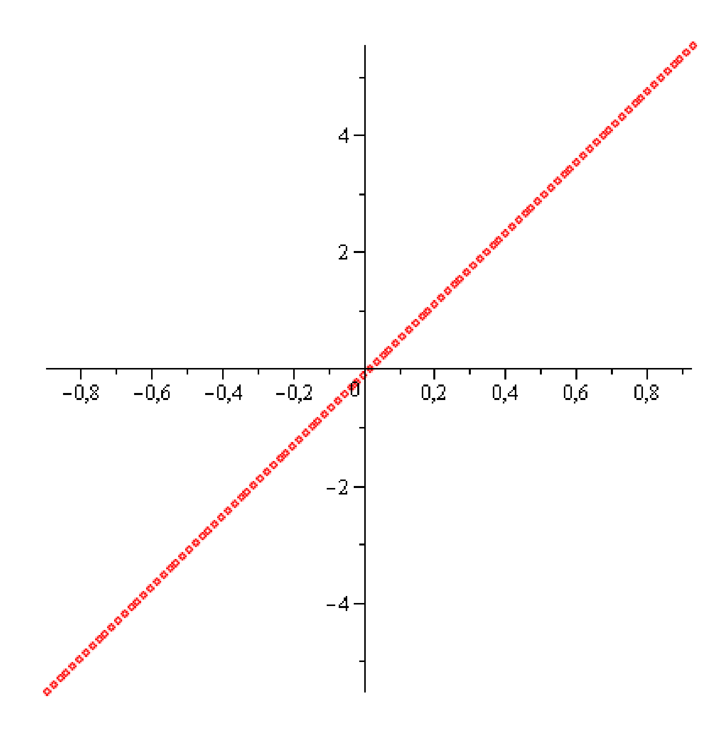


Рис. 1. Одна компонента связности дополнения предельного спектра

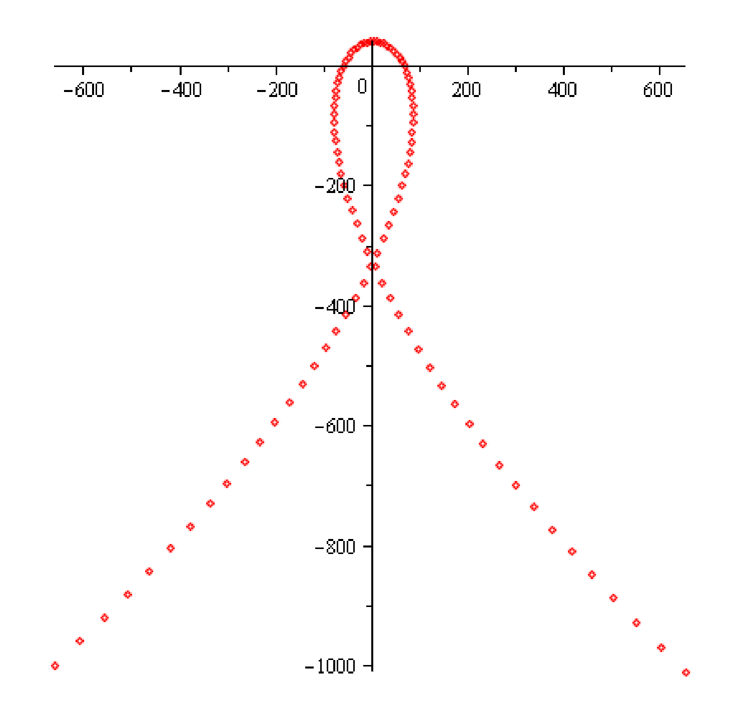


Рис. 2. Две компоненты связности дополнения предельного спектра

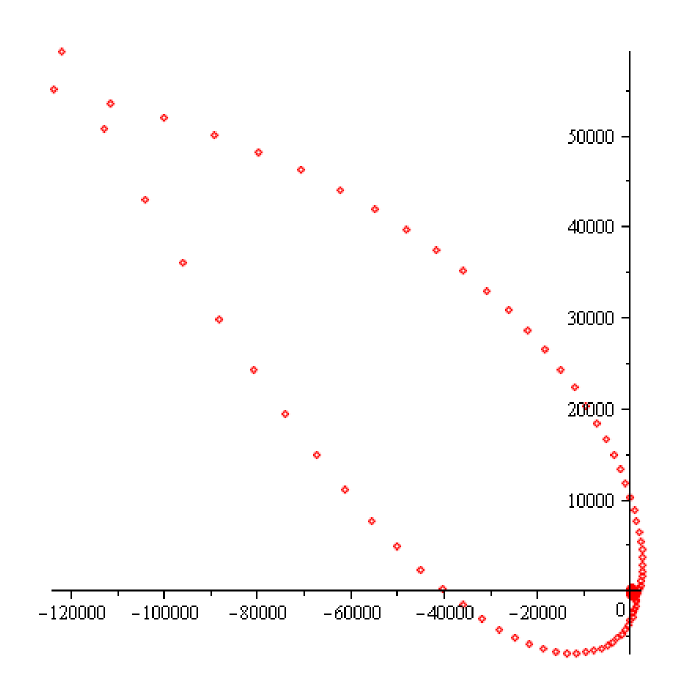


Рис. 3. Три компоненты связности дополнения предельного спектра

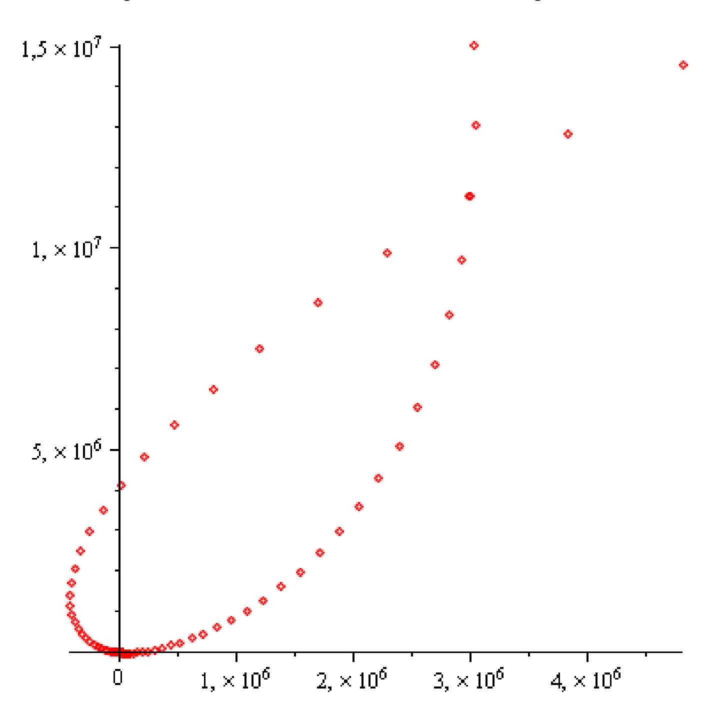


Рис. 4. Четыре компоненты связности дополнения предельного спектра

Замечание. К сожалению, возможности программы Maple аналитических вычислений не позволяют хорошо рассмотреть на рис. 4 число компонент связности дополнения предельного спектра из-за большой разницы масштабов различных компонент связности дополнения предельного спектра.

Сравнение предельного спектра и спектра ленточных тёплицевых матриц. Рассмотрим примеры вычисления спектра ленточных тёплицевых матриц достаточно больших размеров с рассмотренными выше символами. Такие спектры должны быть хорошими приближениями предельных спектров, построенных в предыдущем пункте. В настоящей работе важно показать, что в пределе по размеру матрицы спектры рассмотренных матриц стремятся к кривой, дополнение которой содержит нужное число компонент связности, такое же как и на соответствующих графиках из предыдущего пункта.

Рассмотрим тёплицевы матрицы с символом $b(t) = \mu + t^{-k}(t-\alpha)^k (t-\beta)^k$ при

$$k = 3,\ \alpha = 3{,}1123 + 1{,}7868i,\ \beta = -6{,}1065 - 3{,}5058i,\ \mu = 2{,}7 + 1{,}7i\ . \qquad (6)$$

В этом случае символ имеет следующий вид:

$$b(t)=t^3+(8{,}9820+5{,}1570i)t^2+(-20{,}1961-34{,}5865i)t-0{,}8233-480{,}6002i+$$
$$+\frac{-497{,}4325+881{,}4213i}{t}+\frac{-5687{,}1709+3376{,}5336i}{t^2}+\frac{16135{,}0717-236{,}3335i}{t^3}. \quad (7)$$

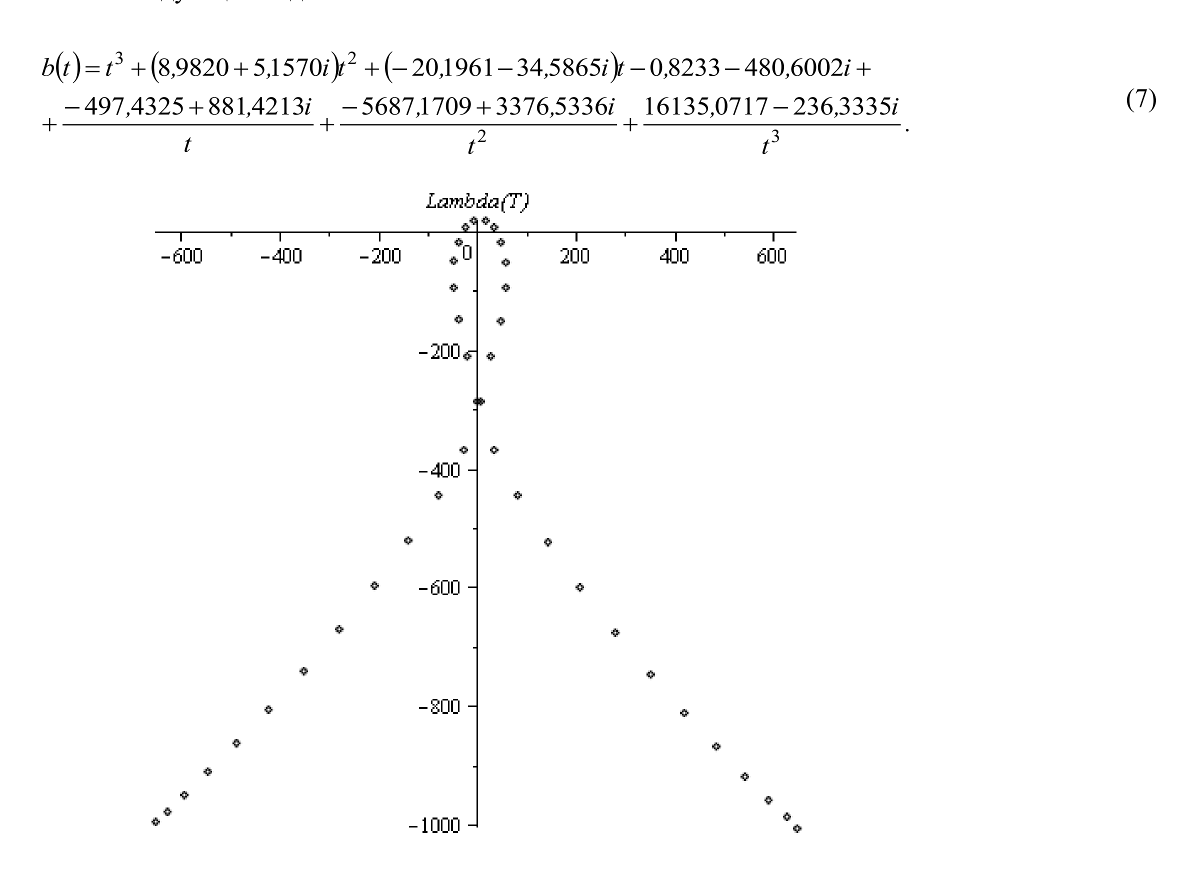


Рис. 5. График собственных значений тёплицевой матрицы с символом (7) размера $n=40$

Заключение. Экспериментально исследован вопрос о числе компонент связности дополнения предельного спектра ленточных тёплицевых матриц, лорановский полином которых — многочлен вида $b(t)=\mu+t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k$. Рассмотрен алгоритм построения тёплицевых матриц с данным символом и заранее заданным числом компонент связности дополнения предельного спектра. Экспериментально проверено, что для каждого натурального числа j между 1 и $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ можно подобрать такой символ $b(t)=\mu+t^{-k}(t-\alpha)^k(t-\beta)^k$, что предельный спектр тёплицевых матриц с этим символом делит комплексную плоскость ровно на j компонент связности. Этот результат даёт, в частности, оценку снизу для максимального числа компонент дополнения предельного спектра для ленточных тёплицевых матриц с символом — многочленом Лорана заданной степени.

Библиографический список

1. Boettcher, A. Spectral properties of banded Toeplitz matrices / A. Boettcher, S. Grudsky. — Philadelphia : SIAM, 2005. — 422 p.

2. Schmidt, P. The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial / P. Schmidt, F. Spitzer // Math. Scand. — 1960. — V. 8. — P. 15–38.

3. Ullman, J. L. A problem of Schmidt and Spitzer / J. L. Ullman // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73. — P. 883–885.

4. Batalshikov, A. Asymptotics of eigenvalues of large symmetric banded Toeplitz matrices / A. Batalshikov, S. Grudsky, V. Stukopin // Linear Algebra and its Applications. — 2015. — V. 469. — P. 464–486.

5. Золотых, С. А. О вычислении предельного спектра ленточных тёплицевых матриц / С. А. Золотых, В. А. Стукопин // Математический форум. (Итоги науки. Юг России.) —2013. — Т. 7. — С. 80–87. Золотых, С. А. Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц / С. А. Золотых, В. А. Стукопин // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2012. — №8(69). — С. 5–11.

6. Батальщиков, А. А. О распределении собственных чисел тёплицевых матриц с символом Хартвига-Фишера / А. А. Батальщиков, В. А. Стукопин // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2011. — № 3. — С. 812–819.

7. Widom, H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Toeplitz matrices and the asymptotics of Toeplitz

determinants in the case of nonvanishing index / H. Widom // Oper. Theory: Adv. Appl. — 1990. — V. 48. — P. 387–421.
8. Золотых, С. А. Об оценках снизу для максимального числа компонент дополнения предельного спектрпоследовательности тёплицевых матриц с символом заданной степени / С. А. Золотых // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : сб. трудов междунар. науч. конф. — Владикавказ, 2015. — С. 72 — 73.
9. Золотых, С. А. Об оценке числа компонент связности предельного спектра ленточных тёплицевых матриц / С.А. Золотых, В. А. Стукопин // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–III : сб. трудов междунар. науч. конф. — Ростов-на-Дону, 2013. — С. 20.
10. Золотых, С. А. Об оценке числа компонент связности предельного спектра ленточных тёплицевых матриц / С. А. Золотых, В. А. Стукопин //Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – III". — 2013. — С. 20.

References

1. Boettcher, A., Grudsky, S. Spectral properties of banded Toeplitz matrices. Philadelphia: SIAM, 2005, 422 p.
2. Schmidt, P., Spitzer, F. The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial. Mathematica Scandinavica, 1960, vol. 8, pp. 15–38.
3. Ullman, J.L. A problem of Schmidt and Spitzer. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, no. 6, pp. 883–885.
4. Batalshikov, A., Grudsky, S., Stukopin, V. Asymptotics of eigenvalues of large symmetric banded Toeplitz matrices. Linear Algebra and its Applications, 2015, vol. 469, pp. 464–486.
5. Zolotykh, S.A., Stukopin, V.A. O vychislenii predel'nogo spektra lentochnykh teplitsevykh matrits. [On calculation of the limitary spectrum of band Toeplitz matrices.] Matematicheskiy forum (Itogi nauki. Yug Rossii).2013, vol. 7, pp. 80–87 (in Russian).
6. Zolotykh, S.A., Stukopin, V.A. Ob opisanii predel'nogo spektra lentochnykh teplitsevykh matrits. [On formulation of limitary spectrum of banded Toeplitz matrices.] Vestnik of DSTU, 2012, no. 8(69), pp. 5–11 (in Russian).
7. Batalshchikov, A.A., Stukopin, V.A. O raspredelenii sobstvennykh chisel teplitsevykh matrits s simvolom Khartviga Fishera. [On distribution of eigen values of Toeplitz matrices with Hartwig-Fisher symbol.] Vestnik of DSTU, 2011, no. 3, pp. 812–819 (in Russian).
8. Widom, H. Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Toeplitz matrices and the asymptotics of Toeplitz determinants in the case of nonvanishing index. Oper. Theory: Adv. Appl., 1990, vol. 48, pp. 387–421.
9. Zolotykh, S.A. Ob otsenkakh snizu dlya maksimal'nogo chisla komponent dopolneniya predel'nogo spectra posledovatel'nosti teplitsevykh matrits s simvolom zadannoy stepeni. [On lower bounds for the maximum number of complement components of the limit spectrum of a sequence of Toeplitz matrices with symbol of given degree.] Poryadkovyy analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniya: sb. trudov mezhdunar. nauch. konf. [Ordinal analysis and related issues of mathematic simulation: Proc. Int. Sci. Conf.] Vladikavkaz, 2015, pp. 72–73 (in Russian).
10. Zolotykh, S.A., Stukopin, V.A. Ob otsenke chisla komponent svyaznosti predel'nogo spektra lentochnykh teplitsevykh matrits. [On estimation of number of connected components of the limitary spectrum of the band Toeplitz matrices.] Sovremennye metody i problemy teorii operatorov i garmonicheskogo analiza i ikh prilozheniya–III: sb. trudov mezhdunar. nauch. konf. [Modern methods and problems of the theory of operators and harmonic analysis and their applications-III: Proc. Int. Sci. Conf.] Rostov-on-Don, 2013, p. 20 (in Russian).

Поступила в редакцию 21.07.2015
Сдана в редакцию 21.07.2015
Запланирована в номер 24.09.2015